Universidad Rey Juan Carlos

TEORÍA DE LA SEÑAL Y COMUNICACIONES

Grados en Ingeniería en Sistemas de Telecomunicación, Sistemas Telemáticos y Tecnologías de la Telecomunicación

Curso 2013-14; 30 de Junio de 2014

Asignatura: Señales y Sistemas

Duración total: 3 horas

Problema 1 (2 puntos)

Sean las señales siguientes:

$$x(t) = 3u(t) + e^{j\pi t}u(t-2) + 3e^{-2t}u(t-4)$$

$$s[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} j^k \delta[n-2k]$$

a) Representar $v[n] = Real\{s[n]\}$ y dar una expresión analítica. (0,50 puntos)
b) Representar $m(t) = r(-2t+2)$, donde $r(t) = -2\, Imag\{x(t)\}$. (0,50 puntos)
c) Calcular la potencia y la energía de *v[n]* y de *s[n]*. (0,50 puntos)
d) Estudiar la periodicidad de $s[n]$, de $v[n]$ y de $m(t)$. (0,50 puntos)

Problema 2 (2 puntos)

a) Estudie linealidad e invarianza del sistema $y(t) = \mathrm{x}(\mathrm{u}(t-2))$ (0,50 puntos)
b) Estudie causalidad y estabilidad del SLIT dado por $h[n] = j^n \cdot u(2+n)$. (0,50 puntos)
c) Calcule la convolución de $x[n] = u[n+2]$ con $h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{|n|}$. (0,50 puntos)
d) Un SLIT consiste en la asociación en serie de $h_1[n] = \delta[n-1] + \delta[n] + \delta[n+1]$ con $h_2[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$. Si su asociación en paralelo con $h_3[n]$ da como resultado un sistema equivalente $h_{eq}[n] = u[n]$, ¿cuál es la expresión de $h_3[n]$? (0,50 puntos)

Problema 3 (4 puntos)

a) Una señal $x(t)$ es ***real*** y periódica, con periodo fundamental 6 segundos. Teniendo en cuenta que: (1) su valor medio es 1; (2) su potencia media es 5W; (3) tiene 5 de coeficientes del DSF no nulos; (4) el módulo cada uno de los coeficientes asociados a componentes periódicas con *k>0* es el mismo; (5) se cumple que:

$$\arg\{a_1\} = \arg\{a_{-1}\}; \quad \arg\{a_2\} = \pi;$$

Exprese dicha señal como una suma de señales sinusoidales reales. (1,50 puntos)

b) La señal $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k \delta(t-2k)$ atraviesa dos SLIT en serie. El primero tiene una respuesta en frecuencia real, dada por un filtro ideal de amplitud 1 en $\omega \in (-0.75\pi, 0.75\pi)$. El segundo es un sistema retardo de 2 segundos. Obtenga una expresión para $h_1(t)$, $h_2(t)$, $H_1(j\omega)$, $H_2(j\omega)$ y para la TF de la señal de salida $y(t)$.
(1,50 puntos)

c) Calcule la Transformada de Fourier de $h(t) = 3\, e^{-2\,|t-2|}$. (1 punto)

PRUEBA DE LABORATORIO

a) En la Figura (1), indique lo que representa cada panel. Dé una expresión aproximada para *x(t)*, para h*(t)* y para *y(t)*. (Nota: "Flipped signal" indica la sinusoide). (1 punto)

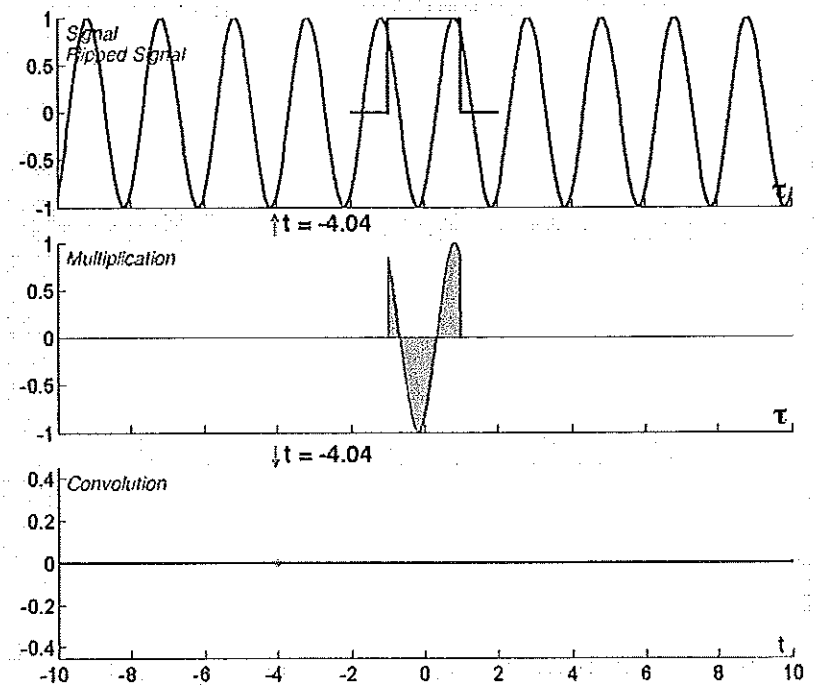


Figura (1)

b) En la Figura 2, ¿cuál es la frecuencia fundamental de cada sonido? ¿Están dando la misma nota los dos instrumentos? ¿Por qué? (1 punto)

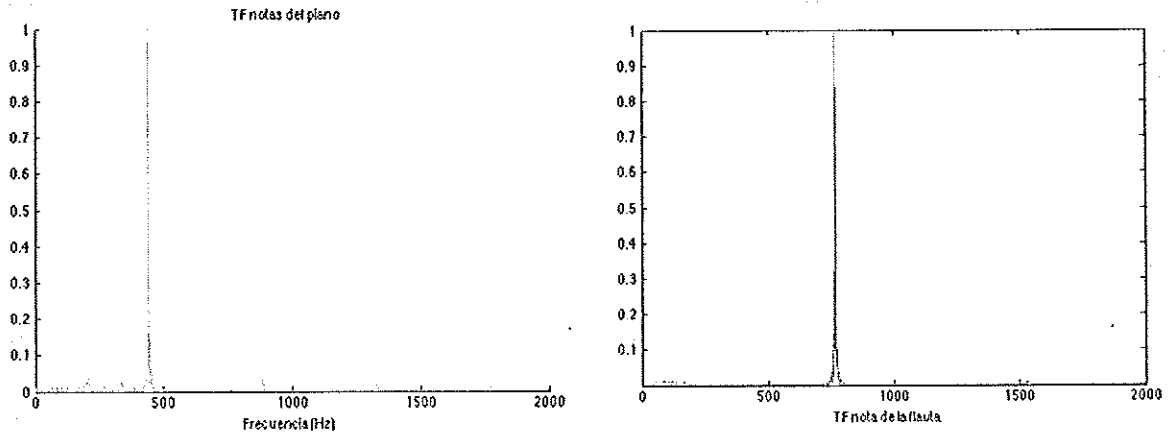


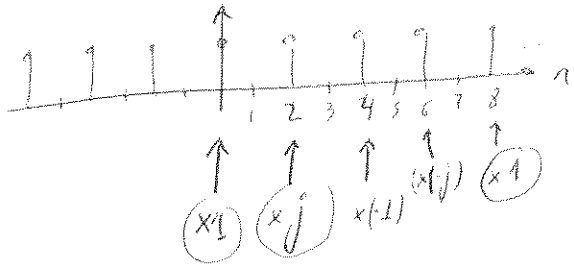
Figura (2)

SISTEMAS LINEALES

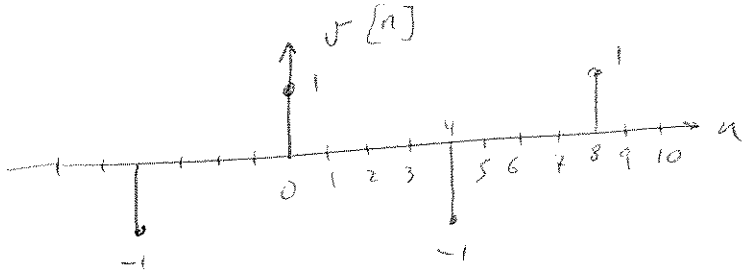
Junio 2014

Problema 1

a) $s[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} j^k \cdot \delta[n-2k]$



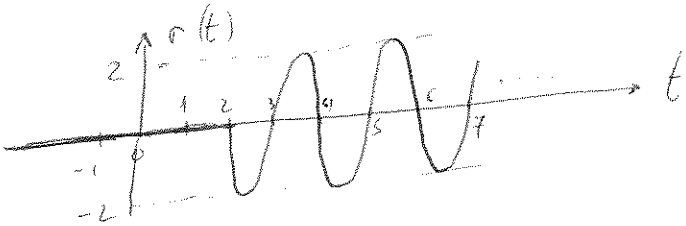
$v[n] = Re\{s[n]\}$ → me quedo solo con los multiplicados $\boxed{\cdot 1}$ y $\boxed{\cdot(-1)}$.

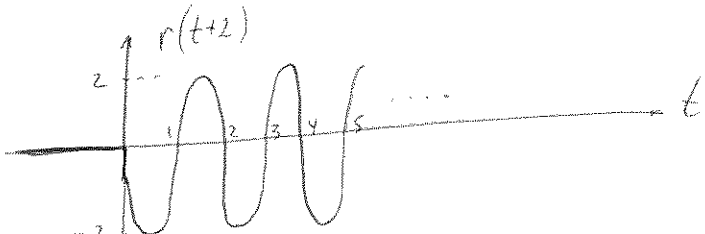


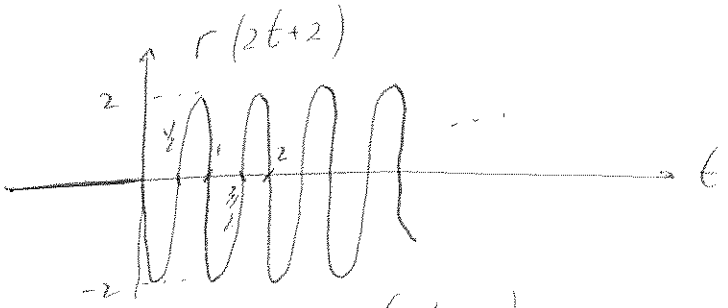
$$v[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \cdot \delta[n-4k]$$

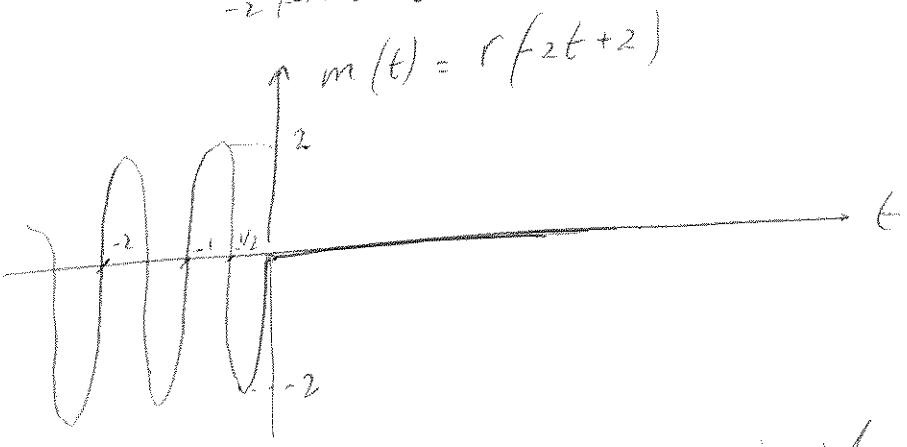
b) $x(t) = \underbrace{3 \cdot u(t) + 3 \cdot e^{-2t} \cdot u(t-4)}_{real} + u(t-2) \cdot [\underbrace{\cos \pi t}_{real} + j \underbrace{\operatorname{sen}(\pi t)}_{imaginario}]$

$r(t) = -2 \cdot Im\{x(t)\} = -2 \cdot \operatorname{sen}(\pi t) \cdot u(t-2)$









Se puede comprobar que coincide con la función fruto de sustituir $(-2t+2)$ en la función $-2\cdot\text{sen}(\pi t)\cdot u(t-2)$.

$$m(t) = -2\cdot\text{sen}\left[\pi(-2t+2)\right]\cdot u\left((-2t+2)-2\right) = -2\cdot\text{sen}(-2\pi t+2\pi)\cdot u(-2t) =$$

equivalente

$$m(t) = 2\cdot\text{sen}(2\pi t-2\pi)\cdot u(-t) = 2\cdot\text{sen}(2\pi t)\cdot u(-t)$$

¡CORRECTO!

c) $v[n]$ es una señal periódica $(N=8)$, luego tendrá energía infinita. Calculamos su potencia.

$$P_{v[n]} = \frac{1}{\underset{8}{N}}\sum_{k=0}^{\overset{7}{N-1}} |v[k]|^2 = \frac{1}{8}\cdot\left(1^2+(-1)^2\right) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

$s[n]$ también es una señal periódica de periodo 8, por lo que tendrá energía infinita.

$$P_{s[n]} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}|s[k]|^2 = \frac{1}{8}\cdot\left(1^2+|j|^2+(-1)^2+|-j|^2\right) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

d) Ya hemos demostrado que $s[n]$ es periódica de periodo 8 muestras, también lo es $v[n]$.

La señal $m(t)$ hemos visto que no es periódica ya que está multiplicada un seno por $u(-t)$ y eso le hace perder la periodicidad.

Problema 2

a) $y(t) = x(u(t-2))$

ADITIVIDAD: $x_1(t) \Rightarrow y_1(t) = x_1(u(t-2))$
$x_2(t) \Rightarrow y_2(t) = x_2(u(t-2))$ $\Big\}$ $y_1(t)+y_2(t) = x_1(u(t-2)) + x_2(u(t-2))$

$x_3(t) = x_1(t) + x_2(t) \Rightarrow y_3(t) = x_3(u(t-2)) = x_1(u(t-2)) + x_2(u(t-2))$ OK

ESCALADO: $x_1(t) \Rightarrow y_1(t) = x_1(u(t-2)) \Rightarrow a \cdot y_1(t) = a \cdot x_1(u(t-2))$

$x_2(t) = a \cdot x_1(t) \Rightarrow y_2(t) = x_2(u(t-2)) = a \cdot x_1(u(t-2))$ OK

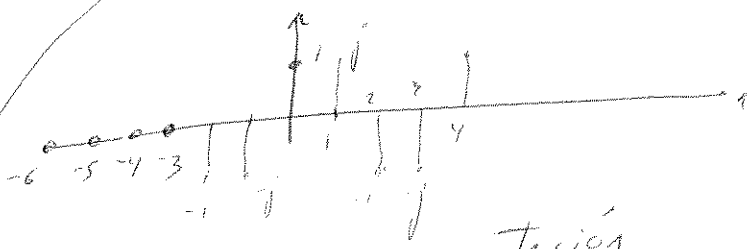
El sistema es lineal

$x_1(t) \Rightarrow y_1(t) = x_1(u(t-2)) \Rightarrow y_1(t-t_0) = x_1(u(t-t_0-2))$

$x_2(t) = x_1(t-t_0) \Rightarrow y_2(t) = x_2(u(t-2)) \neq x_1(u(t-2) - t_0)$ ✗ NO

El sistema es "variante" temporalmente

b) $h[n] = j^n \cdot u[2+n]$



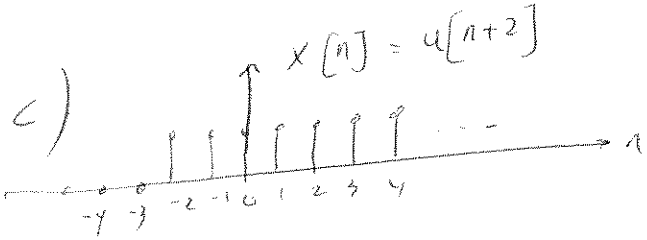
No es una representación verídica (sería módulo y fase) pero sirve para ver que es una señal no limitada en tiempo y que tiene valores para $n<0$

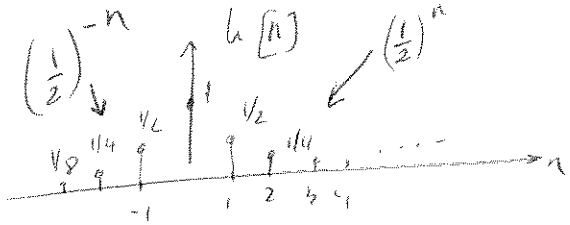
No es causal, ya que la respuesta impulsiva tiene valores $\neq 0$ en $n=-1$ y en $n=-2$

No es estable puesto que no es integrable en valor absoluto ya que $\sum_{k=-2}^{\infty} 1 = \infty$

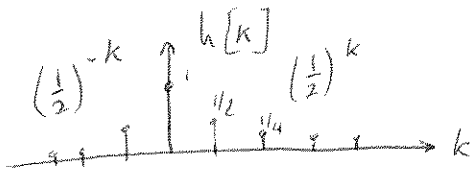
es el módulo de todas las muestras.

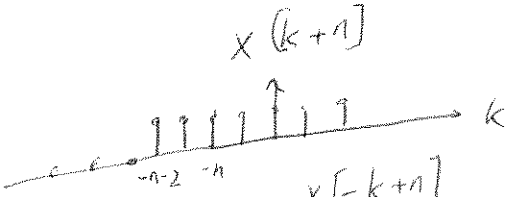
c)

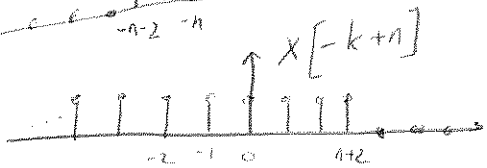


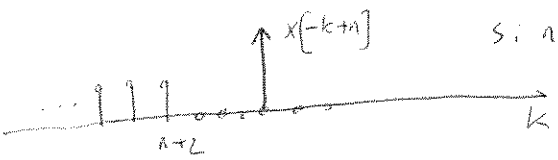


$$y[n] = x[n] * h[n] = h[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \cdot x[n-k]$$



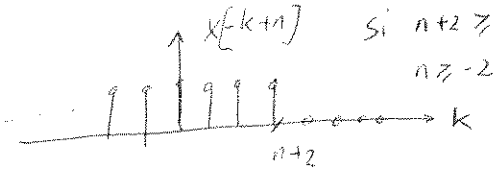






Si $n+2<0 \Rightarrow \boxed{n<-2}$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n+2} 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-k} = \sum_{k=-\infty}^{n+2} 2^k = \frac{2^{n+2} \cdot 2 - \cancel{2^{-\infty}}}{2-1} = \boxed{2^{n+3}}$$



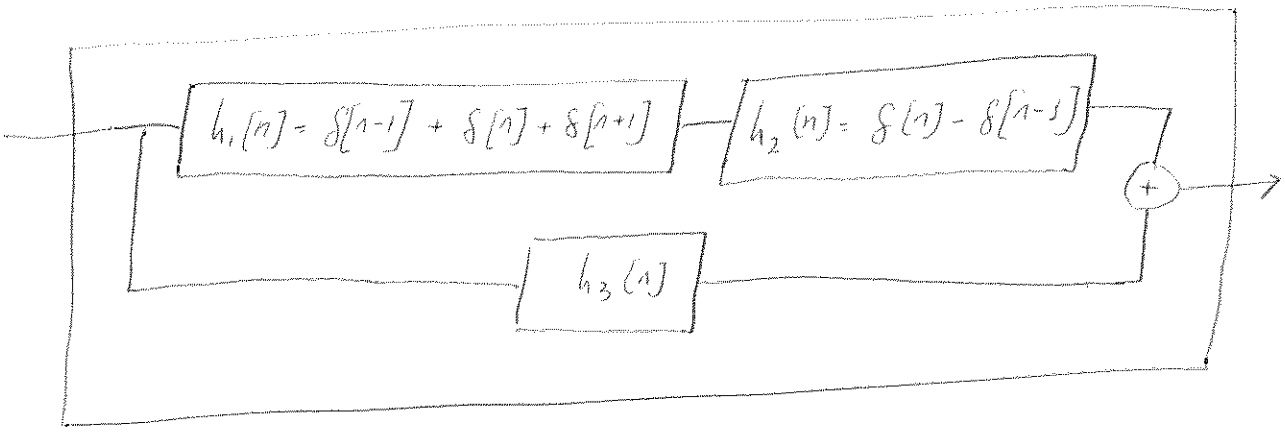
Si $n+2 \geq 0$
$n \geq -2$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{-k} + \sum_{k=0}^{n+2} \left(\frac{1}{2}\right)^{k} = \frac{2^{-1} \cdot 2 - 0}{2-1} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} \cdot \frac{1}{2} - 1}{\frac{1}{2} - 1}$$

$$= 1 + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+3} - 1}{-1/2} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} + 2 = \boxed{3 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}}$$

Agrupando $y[n] = \begin{cases} 2^{n+3} & \text{si} \quad n < -2 \\ 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} & \text{si} \quad n \geq -2 \end{cases}$

d)



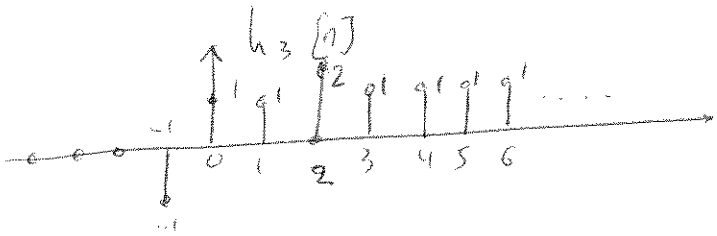
$$h_{eq}[n] = u[n]$$

$$h_1[n] * h_2[n] = \delta[n-1] + \delta[n] + \delta[n+1] - \delta[n-2] - \delta[n-1] - \delta[n]$$

$$h_1[n] * h_2[n] = \delta[n+1] - \delta[n-2]$$

Por lo tanto $h_3[n] + \delta[n+1] - \delta[n-2] = u[n]$,

entonces $h_3[n] = u[n] - \delta[n+1] + \delta[n-2]$



Problema 3

a) $T = 6\,s$

$a_0 = 1$

$|a_{-2}|^2 + |a_{-1}|^2 + |a_0|^2 + |a_1|^2 + |a_2|^2 = 5$

$|a_1| = |a_2|$.

Además por ser $x(t)$ real se cumple que $|a_{-1}| = |a_1|$ y que $|a_{-2}| = |a_2| = |a_1| = |a_{-1}|$

Es decir, que todos tienen el mismo valor $\Rightarrow 4 \cdot |a_1| + 1 = 5 \Rightarrow |a_1| = \frac{5-1}{4} = 1$

Todos los coeficientes tienen módulo unidad.

Además por ser real se tiene que cumplir que $\arg\{a_1\} = -\arg\{a_{-1}\}$ y que $\arg\{a_2\} = -\arg\{a_{-2}\}$

Como dicen que $\arg\{a_1\} = \arg\{a_{-1}\}$, ambas cosas solo las cumple si $\arg\{a_1\} = \arg\{a_{-1}\} = 0 \Rightarrow \boxed{a_{-1} = 1}$ $\boxed{a_1 = 1}$

Además $\arg\{a_2\} = \pi \Rightarrow \boxed{a_2 = 1 \cdot e^{j\pi} = -1}$ y entonces $-\arg\{a_{-2}\} = \pi \Rightarrow \boxed{a_{-2} = -1}$

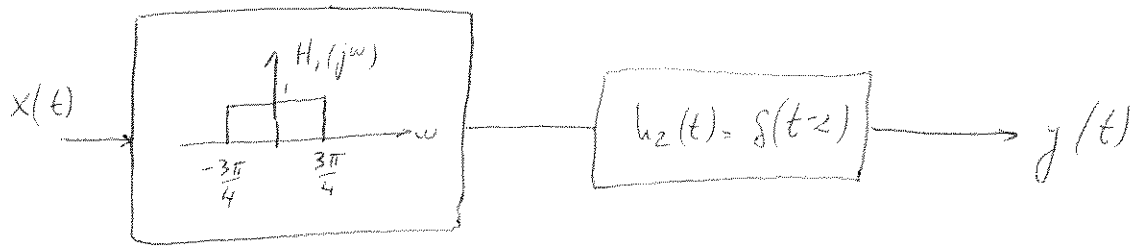
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cdot e^{jk\left(\frac{2\pi}{T}\right)\cdot t} = -e^{j(-2)\cdot\frac{2\pi}{6}\cdot t} + e^{(-1)\cdot\frac{2\pi}{6}\cdot t} + e^{j0} + e^{j1\cdot\frac{2\pi}{6}\cdot t} - e^{j2\cdot\frac{2\pi}{6}\cdot t}$$

$2\cdot\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$

$-2\cdot\cos\left(\frac{2\pi}{3}t\right)$

$$\boxed{x(t) = 1 + 2\cdot\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right) - 2\cdot\cos\left(\frac{2\pi}{3}t\right)}$$

b)



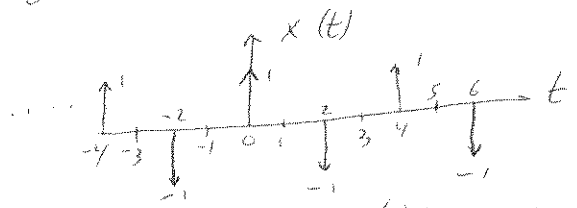
Empezamos por dar una expresión para $H_1(j\omega)$, $h_1(t)$, $h_2(t)$ y $H_2(j\omega)$. Utilizando las tablas.

$H_1(j\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \lvert\omega\rvert \le \frac{3\pi}{4} \\ 0 & \text{si } \lvert\omega\rvert > \frac{3\pi}{4} \end{cases}$	$h_1(t) = \dfrac{\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\cdot t\right)}{\pi t}$
$h_2(t) = \delta(t-2)$	$H_2(j\omega) = e^{-j\omega\cdot 2}$

Si resolviéramos en el tiempo, tendríamos que convolucionar con una sinc, cosa que no es sencilla. Vamos a intentar resolver en frecuencia.

$$H_{eq}(j\omega) = H_1(j\omega)\cdot H_2(j\omega) = \begin{cases} e^{-2j\omega} & \text{si } \lvert\omega\rvert \le \frac{3\pi}{4} \\ 0 & \text{si } \lvert\omega\rvert > \frac{3\pi}{4} \end{cases}$$

La señal de entrada es un tren de deltas.

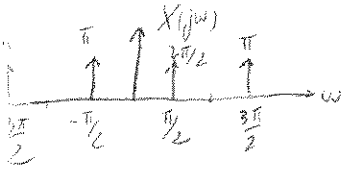


Esta señal la puedo escribir como: $x(t) = \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-4k)}_{\text{periódica con } T_1=4} - \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-4k-2)}_{\text{periódica con } T_2=4}$

$$X(j\omega) = \frac{2\pi}{4}\cdot\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega-\frac{2\pi}{4}k\right) - \frac{2\pi}{4}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega-\frac{2\pi}{4}k\right)\right]\cdot e^{-j\omega 2}$$

← lo meto dentro y queda multiplicando a deltas.

$$X(j\omega) = \frac{\pi}{2}\cdot\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega-\frac{\pi}{2}k\right) - \frac{\pi}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\underbrace{e^{-j\cdot 2\cdot\frac{\pi}{4}\cdot k}}_{e^{-j\pi k}=(-1)^k}\cdot\delta\left(\omega-\frac{\pi}{2}k\right)$$



El filtro $H_{eq}(j\omega)$ solo deja pasar las deltas entre $-\frac{3\pi}{4}$ y $\frac{3\pi}{4}$. Entonces:

$$Y(j\omega) = \pi\cdot e^{-2j\omega}\cdot\delta\left(\omega-\frac{\pi}{2}\right) + \pi\cdot e^{-2j\omega}\cdot(-1)\cdot\delta\left(\omega+\frac{\pi}{2}\right) =$$

$$\boxed{Y(j\omega) = \pi\cdot e^{-j2\cdot\frac{\pi}{2}}\,\delta\left(\omega-\frac{\pi}{2}\right) + \pi\cdot(-1)\cdot\delta\left(\omega+\frac{\pi}{2}\right) = -\pi\left[\delta\left(\omega-\frac{\pi}{2}\right)+\delta\left(\omega+\frac{\pi}{2}\right)\right]}$$

$t-2$ → positivo si $t \geq 2$
→ negativo si $t < 2$

c) $h(t) = 3 \cdot e^{-2|t-2|} = 3 \cdot e^{-2(t-2)} \cdot u(t-2) + 3 \cdot e^{-2(-t+2)} \cdot u(-t-2)$

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t} \, dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} 3 \cdot e^{-2(t-2)} \cdot u(t-2) \cdot e^{-j\omega t} \, dt + \int_{-\infty}^{\infty} 3 \cdot e^{-2(-t+2)} \cdot u(-t-2) \cdot e^{-j\omega t} \, dt =$$

$$= 3 \int_{2}^{\infty} e^{-2t} \cdot e^{4} \cdot e^{-j\omega t} \, dt + 3 \cdot e^{-4} \int_{-\infty}^{2} e^{2t} \cdot e^{-j\omega t} \, dt$$

$$= 3 \cdot \left[e^{4} \int_{2}^{\infty} e^{-(2+j\omega)t} \, dt + e^{-4} \int_{-\infty}^{2} e^{+(+2-j\omega)t} \, dt \right] =$$

$$= 3 \cdot \left[e^{4} \frac{-1}{2+j\omega} \cdot e^{-(2+j\omega)t} \Big|_{2}^{\infty} + e^{-4} \frac{1}{2-j\omega} \cdot e^{(2-j\omega)t} \Big|_{-\infty}^{2} \right] =$$

$$= 3 \cdot \left[e^{4} \frac{-1}{2+j\omega} \left(0 - e^{-(2+j\omega) \cdot 2} \right) + e^{-4} \frac{1}{2-j\omega} \left(e^{(2-j\omega) \cdot 2} - 0 \right) \right]$$

$$= 3 \cdot \left[e^{4} \frac{e^{-4} \cdot e^{-j2\omega}}{2+j\omega} + e^{-4} \frac{e^{4} \cdot e^{-j2\omega}}{2-j\omega} \right]$$

$$\boxed{H(j\omega) = \frac{3 \cdot e^{-2j\omega}}{2+j\omega} + \frac{3 \cdot e^{-2j\omega}}{2-j\omega}} = 3 \cdot e^{-2j\omega} \frac{4}{4+\omega^2}$$

a) El panel de arriba representa tanto la señal $x(t)$, que en este caso es un pulso, como la señal $h(t-\tau)$, que en este caso es una sinusoide ya desplazada e invertida.
El segundo panel representa el producto entre ambas señales $\Rightarrow$ $x(t) \cdot h(t-\tau)$
El último panel representa la convolución de $x(t)$ con $h(t)$, es decir $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot h(t-\tau)\, d\tau$, que en este caso es cero porque estamos convolucionando una sinusoide con un pulso justo de anchura, el periodo de la sinusoide.

$$\boxed{x(t) = \operatorname{sen}\left(2\pi \cdot \frac{1}{T_1} \cdot t\right) \simeq \operatorname{sen}\left(2\pi \cdot \frac{1}{2} \cdot t\right) = \operatorname{sen}(\pi t)}$$

$T_1 \simeq 2s$ (un poco menor)

APROXIMADAMENTE

$$\boxed{h(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } |t| \leq 1 \\ 0 & \text{si } |t| > 1 \end{cases}}$$

$$\boxed{y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sen}(\pi t) \cdot h(t-\tau)\, d\tau = 0}$$

b) La frecuencia fundamental del piano está muy cercana a 500 Hz $\Rightarrow f_{PIANO} \simeq 470$ Hz
La frecuencia fundamental de la flauta está cercana a 750 Hz $\Rightarrow f_{FLAUTA} \simeq 760$ Hz
Lógicamente no están dando la misma nota, ya que sus frecuencias fundamentales no coinciden.